

131

324 (EY)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

निर्देश :

- (i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- (iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- (v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- (vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए।
- (vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समझ भ्रष्ट मत कीजिए।

1. सभी खण्ड कीजिए।

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।

(क) यदि A एक वर्ग आव्यूह है और $A^2 = A$ है, तो $(A + I)^3 - 7A$ होगा : 1(i) A (ii) $3A$ (iii) I (iv) $I - A$ (ख) $\int \cos^2 x dx$ का मान होगा : 1(i) $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$ ✓(ii) $-\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{x}{4} + c$ (iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$ (iv) $-\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{4} + c$

- (ग) $-\hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} - \hat{k} \cdot \hat{k}$ का मान होगा : 1
- (i) 1 (ii) 0
- (iii) -1 (iv) 2

- (घ) अवकल समीकरण $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 7y = 0$ की घात होगी : 1
- (i) 2 (ii) 3
- (iii) 6 (iv) 5

- (ङ) यदि $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, तो A से B तक फलन होगा : 1
- (i) $\{(a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 4)\}$ (ii) $\{(a, 3), (a, 2), (b, 2), (c, 4)\}$
- (iii) $\{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$ (iv) $\{(a, 2), (b, 4), (b, 3), (c, 4)\}$

2. सभी खण्ड कीजिए :

- (क) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

- (ख) यदि सदिश $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ लम्बवत् है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए । 1

- (ग) यदि $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ और $P(A \cap B) = 0.18$, तो $P(B|A)$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

- (घ) $\frac{dy}{dx} = \frac{2+y}{x-2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 1

- (ङ) यदि $x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $x - y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए । 1

3. सभी खण्ड कीजिए :

- (क) यदि $A = \{a, b, c\}$ तथा $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ है, तो B से A तक फलनों की संख्या तथा इनके बीच एकैकी आच्छादी (bijective) फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए । 2

- (ख) यदि $y = A \cos t + B \sin t$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$ है । 2

- (ग) यदि इकाई सदिश \hat{a} और \hat{b} के बीच का कोण θ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} |\hat{a} - \hat{b}|$. 2

- (घ) बिन्दु $A(3, -2, -5)$ से गुज़रने वाली तथा सदिश $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के समान्तर रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ वर्धमान है। 2

(ख) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ग) यदि R_1 तथा R_2 समुच्चय A में दो तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी A में एक तुल्यता संबंध है। 2

(घ) यदि \vec{a} , \vec{b} तथा \vec{c} सदिश हैं और $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ है, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) वक्र $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ख) ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 6 है तथा उनके घनों का योगफल न्यूनतम है। 5

(ग) सिद्ध कीजिए : 5

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

(घ) आलेखीय विधि द्वारा रैखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों
 $x + 3y \leq 60$, $x + y \geq 20$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
के अन्तर्गत $z = 3x + 8y$ का न्यूनतम तथा अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन की $x = 2$ पर सांतत्य तथा अवकलनीयता की जाँच कीजिए। 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $(x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = y$ को हल कीजिए । 5

(ख) एक विद्यालय में 500 विद्यार्थी हैं जिनमें से 230 लड़के हैं । यह ज्ञात है कि 20% लड़के कक्षा XII में पढ़ते हैं । एक यादृच्छया चुना गया विद्यार्थी लड़का है और कक्षा XII में पढ़ता है, उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 5

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A \cdot \text{adj} A = |A| \cdot I$. 5

(घ) सिद्ध कीजिए कि $N \times N$ पर संबंध R जहाँ $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ तुल्यता संबंध है । 5

(ङ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ तथा $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह विधि से रेखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए : 8

$$-x + 3y - 2z = 3$$

$$3x + 2y + 3z = 5$$

$$-2x + y + z = -4$$

(ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए । 8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x + \cot x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 3

(ii) सिद्ध कीजिए : 5

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2$$

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 8

9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण $(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$ को हल कीजिए । 8

(ख) (i) यदि $\cos y = x \cos (a + y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$$
 4

(ii) यदि $y = (\sin x)^{\tan x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए । 4

(English Version)

Instructions :

- (i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all **nine** questions in this question paper.
- (iii) **All** questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do **all** the parts.

Select the correct alternative of each part and write it in your answer book.

(a) If A is a square matrix and $A^2 = A$, then $(A + I)^3 - 7A$ will be : 1

- (i) A (ii) 3A
(iii) I (iv) I - A

(b) The value of $\int \cos^2 x dx$ will be : 1

- (i) $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$ (ii) $-\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{x}{4} + c$
(iii) $\cos^2 x - \sin^2 x + c$ (iv) $-\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{4} + c$

(c) The value of $-\hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} - \hat{k} \cdot \hat{k}$ will be : 1

- (i) 1 (ii) 0
(iii) -1 (iv) 2

(d) The degree of the differential equation $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 7y = 0$ will be : 1

- (i) 2 (ii) 3
(iii) 6 (iv) 5

- (e) If $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, then the function from A to B will be : 1
- (i) $\{(a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 4)\}$ (ii) $\{(a, 3), (a, 2), (b, 2), (c, 4)\}$
- (iii) $\{(a, 3), (b, 2), (c, 3)\}$ (iv) $\{(a, 2), (b, 4), (b, 3), (c, 4)\}$

2. Do **all** the parts :

- (a) Find the value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \sec^{-1}(-2)$. 1
- (b) If the vectors $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are perpendicular, then find the value of λ . 1
- (c) If $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ and $P(A \cap B) = 0.18$, then find the value of $P(B|A)$. 1
- (d) Find the the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{2+y}{x-2}$. 1
- (e) If $x + y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; $x - y = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, then find the value of x and y . 1

3. Do **all** the parts :

- (a) If $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, then find the number of functions and number of bijective functions from B to A . 2
- (b) If $y = A \cos t + B \sin t$, then prove that $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. 2
- (c) If the angle between the unit vectors \hat{a} and \hat{b} is θ , then prove that $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} |\hat{a} - \hat{b}|$. 2
- (d) Find the cartesian equation of the line passing through the point $A(3, -2, -5)$ and parallel to the vector $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$. 2

4. Do **all** the parts :

- (a) Find the interval in which the function $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ is increasing. 2
- (b) Find the value of $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$. 2
- (c) If R_1 and R_2 be two equivalence relations in a set A , then prove that $R_1 \cap R_2$ is also an equivalence relation in A . 2
- (d) If \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} are vectors and $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, then find the value of $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$. 2

5. Do **all** the parts :

(a) Find the area of the part inscribed by the curve $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. 5

(b) Find two numbers such that their sum is 6 and the sum of their cubes is minimum. 5

(c) Prove that : 5

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

(d) Find the minimum and maximum value of L.P.P $z = 3x + 8y$ by graphical method under the following constraints :

$$x + 3y \leq 60, \quad x + y \geq 20, \quad x \leq y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad 5$$

(e) If $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ is defined, then check its continuity and differentiability at $x = 2$. 5

6. Do **all** the parts :

(a) Solve the differential equation $(x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = y$. 5

(b) There are 500 students in a school in which 230 are boys. It is known that 20% boys are studying in class XII. Find the probability that a randomly chosen student is a boy and is of class XII. 5

(c) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then prove that $A \cdot \text{adj } A = |A| \cdot I$. 5

(d) Prove that a relation R on $N \times N$ is defined as $(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ is an equivalence relation. 5

(e) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}). \quad 5$$

7. Do any **one** part :

(a) Solve the system of linear equations by matrix method :

8

$$-x + 3y - 2z = 3$$

$$3x + 2y + 3z = 5$$

$$-2x + y + z = -4$$

(b) Find A^{-1} , if the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

8

8. Do any **one** part :

(a) (i) Find the value of $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}} dx$.

3

(ii) Prove :

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2.$$

5

(b) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

8

9. Do any **one** part :

(a) Solve the differential equation $(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$.

8

(b) (i) If $\cos y = x \cos (a + y)$ and $\cos a \neq \pm 1$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$.

4

(ii) If $y = (\sin x)^{\tan x}$, then find $\frac{dy}{dx}$.

4